Baccalauréat Général - Mathématiques
Épreuve de spécialité
20 mars 2023 J1

PROF EXPRESS
N°1 du soutien scolaire en ligne

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

- CORRIGÉ -

Publié le 14 septembre 2023

Métropole - Session 20 mars 2023 - Jour 1

Consignes de l'épreuve

- Durée de l'épreuve : **4 heures**
- Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.
- Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
- L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Contenus des exercices

Cliquer sur le numéro de la page pour accéder à l'exercice

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte. Les questions sont indépendantes.

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.

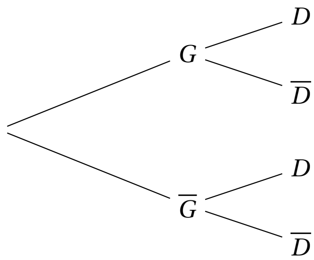
On sait que :

- 20% des machines sont sous garantie ;
- 0,2% des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2% des machines sont défectueuses. Le technicien teste une machine au hasard.

On considère les événements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les événements contraires de G et D.

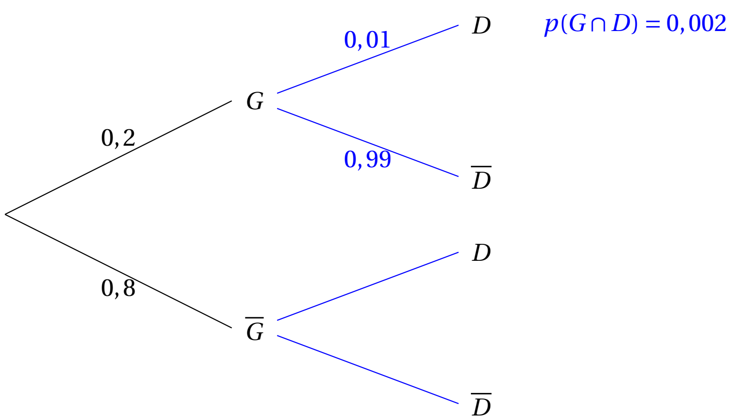
Pour répondre aux questions 1 à 3, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-dessous.



Préambule

Cet exercice est classique. Il y a lieu ici de supposer que les pourcentages donnés s'assimilent à des valeurs de probabilité. Ainsi $p(G) = 0,2$, $p(G \cap D) = 0,002$ et $p(D) = 0,082$.

Ces données permettent de compléter l'arbre de probabilité comme ci-après :



1. La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 $\qquad$ $\boxed{\text{b. } 0,01}$ $\qquad$ c. 0,024 $\qquad$ d. 0,2

Notons que $p(G) \neq 0$. La simple application de la définition d'une probabilité conditionnelle permet de conclure :

$$p_G(D) = \frac{p(G \cap D)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01$$

La réponse b est correcte.

2. La probabilité $p(\overline{G} \cap D)$ est égale à :

a. 0,01 $\boxed{\text{b. 0,08}}$ c. 0,1 d. 0,21

$p(\overline{G} \cap D)$ est la probabilité que la machine ne soit pas sous garantie et qu'elle soit défectueuse. Cette probabilité peut être reliée à $p(D)$ et $p(G \cap D)$, dont les valeurs sont connues, en décomposant D sur le système complet d'évènements $\{G\ ,\ \overline{G}\}$:

$$D = (G \cap D) \cup (\overline{G} \cap D).$$

Or $(G \cap D)$ et $(\overline{G} \cap D)$ sont disjoints. Ce qui fait que $p(D) = p(G \cap D) + p(\overline{G} \cap D)$.
D'où $p(\overline{G} \cap D) = p(D) - p(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08$.

La réponse b est correcte.

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 $\boxed{\text{b. 0,024}}$ c. 0,082 d. 0,1

La probabilité que la machine soit sous garantie, sachant qu'elle est défectueuse, est la probabilité conditionnelle $p_D(G)$.

Puisque $p(D) \neq 0$, $p_D(G) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,002}{0,82} \approx 0,024$.
La réponse b est correcte.

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.
Selon ces indications, pour tout entiet k compris entre 0 et n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,082^k \times (1 - 0,082)^{n-k}$$

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.
La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 $\boxed{\text{b. 0,789}}$ c. 0,864 d. 0,924

L'évènement $(X > 2)$ a pour contraire l'évènement $(X \leq 2)$.
Ce qui fait que $p(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$.
$p(X \leq 2)$ est plus simple à calculer que $p(X > 2)$. En effet, $(X \leq 2) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)$.
Comme ces unions sont disjointes, $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$.
L'énoncé précise que $X \hookrightarrow \beta(50\ ; 0,082)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons :
$p(X \leq 2) \approx 0,211$.
D'où $p(X > 2) \approx 1 - 0,211 = 0,789$
La réponse b est correcte.

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à 0,4.
La plus grande valeur possible pour n est égale à

a. 5 b. 6 $\boxed{\text{b. 10}}$ d. 1

Le fait que toutes les machines fonctionnent correctement signifie qu'il n'y en a aucune de défectueuse. Cette situation correspond à l'évènement $(X = 0)$. Cherchons le plus grand entier n tel que $p(X = 0) > 0,4$.

Or, $p(X=0) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,082^0 \times (1-0,082)^n = 1 \times 1 \times 0,918^n = 0,918^n$

Si bien que $p(X=0) > 0,4 \iff 0,918^n > 0,4$
$\iff \ln(0,918^n) > \ln(0,4)$
$\iff n \times \ln(0,918) > \ln(0,4)$
$\iff n < \dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$ (On change le sens de l'inégalité car $\ln(0{,}918) < 0$)

À l'aide de la calcultrice, nous trouvons $\dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \approx 10,71$.
Le nombre n étant un entier naturel, la plus grande valeur possible pour n inférieure à 10,71 est 10.
La réponse c est correcte.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Nous savons que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
Il s'ensuit, par somme et produit de limites, que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 8\ln(x) = +\infty$

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$

En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Nous savons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (par croissances comparées).

Par somme et produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$ (par produit).

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(x^2-4)}{x}$

L'énoncé nous précise que la fonction f est dérivable.
En dérivant chaque terme de $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$, nous obtenons :
$f'(x) = 2x - 8 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-8}{x} = \dfrac{2(x^2-4)}{x}$

4. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Ce qui a été fait en **3.** permet d'obtenir facilement le signe de $f'(x)$ et donc les variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
En effet, sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$. Nous savons qu'un polynôme du second degré est négatif entre ses racines.

Par conséquent, sur $]0\,;2[$, $f'(x) < 0$; en $x = 2$, $f'(x) = 0$ et sur $]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	4-8ln2	↗	$+\infty$

La fonction f présente bien un minimum, atteint en $x = 2$, et qui vaut $f(2) = 4 - 8\ln 2$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).
D'après le tableau de variations précédent, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;2]$. Elle est donc bijective. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 4-8\ln 2 < 0$.
En vertu du corollaire du théorème de la bijection (aussi appelé « théorème des valeurs intermédiaires »), il existe une valeur unique $\alpha \in]0\,;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

x	0	α	2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	0	4-8ln2	↗	$+\infty$

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Plaçons β dans le tableau de variations de f , celui-ci devient :

x	0	α	2	β	$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	0	4-8ln2	0	$+\infty$

On en déduit le signe de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$$

En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Observons que $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k = f(x) + k$. C'est-à-dire que sur $]0\,;+\infty[$, $g_k = f + k$.

Puisque k est une constante, g_k et f ont la même dérivée. Si bien que la fonction g_k varie comme la fonction f et a un minimum en 2 sur $]0\,;\,+\infty[$ qui est :
$g_k(2) = 4 - 8\ln 2 + k$.
La fonction g_k est donc positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ dès le moment où $4 - 8\ln 2 + k \geq 0$.
Soit pour $k \geq 8\ln 2 - 4$.
Il s'ensuit que la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est $8\ln 2 - 4$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n > 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
$u_2 = 3,9 \times u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$
$u_3 = 3,9 \times u_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$
La modélisation du nombre mensuel de questions à l'aide de la suite (u_n) indique qu'il y aura 400 questions posées le 2$^{\text{e}}$ mois et 490 questions le 3$^{\text{e}}$ mois.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n\ .$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'égalité $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$.

<u>Initialisation</u>
Pour $n = 1$,
$13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - 10 = u_1$.
Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathscr{P}_n$ implique $\mathscr{P}_{n+1}$.
À supposer que $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$ alors

$$u_{n+1} = 0,9\left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n\right) + 1,3$$

$$u_{n+1} = 0,9 \times 13 - 0,9 \times \frac{100}{9} \times 0,9^n + 1,3$$

$$u_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$$

$\mathscr{P}_n$ est bien héréditaire.

<u>Conclusion</u>
$\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire pour tout entier $n \geqslant 1$.
En vertu du principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Autrement dit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$.

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Le simple examen de l'égalité $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$ permet cette déduction.

Comme $0 < 0,9 < 1$, le facteur $0,9^n$ décroît à mesure que n augmente donc $-\dfrac{100}{9} \times 0,9^n$ est un terme croissant. En ajoutant 13 à ce terme, ça ne change pas le sens de variation. La suite (u_n) est donc bien croissante.

Si on ne pense pas à cette approche, on peut procéder classiquement en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}\right) = -\frac{100}{9} \times 0,9^n + \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$$

En factorisant par $\dfrac{100}{9} \times 0,9^n$, on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times 0,1 > 0$$

Il s'ensuit que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n > 0$. Ce qui établit que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-dessous, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Ce programme retourne le plus petit entier n pour lequel u_n franchit le seuil p. Avec la calculatrice, la valeur renvoyée par le programme pour `seuil(8.5)` est 9.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre de questions sera supérieur à 850 à partir du 9e mois.

On peut également retrouver ce résultat par le calcul en considérant l'inéquation d'inconue n : $u_n > 8,5$.

$$\begin{aligned}
u_n > 8,5 &\iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \\
&\iff -\frac{100}{9} \times 0,9^n > -4,5 \\
&\iff 0,9^n < 0,405 \\
&\iff \ln 0,9^n < \ln 0,405 \\
&\iff n \ln 0,9 < \ln 0,405 \\
&\iff n > \frac{\ln 0,405}{\ln 0,9} \; (\ln 0,9 < 0) \\
&\iff n > 8,6
\end{aligned}$$

Le plus petit entier n supérieur à 8,6 est 9.

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n > 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

$v_1 = 9 - 6e^0 = 3$
$v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \approx 4,04$

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} v_n > 8,5 &\iff 9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5 \\ &\iff -6e^{-0,19(n-1)} > -0,5 \\ &\iff e^{-0,19(n-1)} < \frac{1}{12} \\ &\iff -0,19(n-1) < \ln\left(\frac{1}{12}\right) \\ &\iff -0,19(n-1) < -\ln 12 \\ &\iff n - 1 > \frac{\ln 12}{-0,19} \\ &\iff n > \frac{\ln 12}{-0,19} + 1 \\ &\iff n > 14,08 \end{aligned}$$

15 est donc la plus petite valeur de n pour laquelle $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?
Justifier votre réponse.

Nous avons vu que $u_n > 850$ à partir du 9$^{\text{e}}$ mois (premier modèle), tandis que $v_n > 850$ à partir du 15$^{\text{e}}$ mois (second modèle). C'est donc la première modélisation qui amène le plus tôt à modifier la présentation du site.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Pour répondre, comparons les limites des suites (u_n) et (v_n).

- Limite de la suite (u_n)

  $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ car $0 < 0,9 < 1$

  De même $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{100}{9} \times 0,9^n = 0$

  D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 13$ (par addition)

- Limite de la suite (v_n)

  $\lim\limits_{n \to +\infty} -0,19(n-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

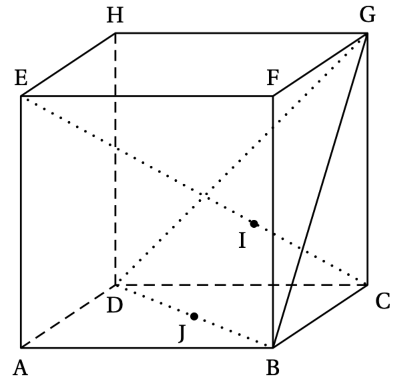
  Par composition de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0,19(n-1)} = 0$

  Et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 9 - 6e^{-0,19(n-1)} = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 9$

À long terme, selon le 1er modèle (partie A), la FAQ contiendra 1300 questions tandis que selon le second modèle (partie B), elle contiendra 900 questions.
À long terme, il y a donc un plus grand nombre de questions sur la FAQ avec la première modélisation.

Exercice 4 (5 points)

On considère le cube $ABCDEFCH$ d'arête 1. On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC). L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

Ces points E, C, et G sont 3 sommets distincts du cube. Relativement au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, par lecture graphique, nous avons $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

La droite (EC) passe par le point E et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (EC) est alors :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & x_E + 1\times t \\ y & = & y_E + 1\times t \\ z & = & z_E + (-1)\times t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & 1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

La droite (EC) est orthogonale au plan (GBD) si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD).

Or $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (GBD), avec $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Observons que :

$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{GB} = 1\times 0 + 1\times(-1) + (-1)\times(-1) = 0$

$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BD} = 1\times(-1) + 1\times 1 + (-1)\times 0 = 0$

On constate que le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD). Il s'ensuit que $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal au plan (GBD). Étant aussi un vecteur directeur de la droite (EC), on en déduit que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (GBD).

4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :

$$x + y - z - 1 = 0.$$

Cette équation cartésienne est celle d'un plan qui a pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, soit le vecteur $\overrightarrow{EC}$. De plus, les coordonnées de G vérifient cette équation.
L'unicité du plan perpendiculaire à la droite (EC) et passant par G fait qu'il s'agit bien de l'équation cartésienne du plan (GBD).

b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

I est le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC), donc $I \in (GBD)$ et $I \in (EC)$.
Il s'ensuit que les coordonnées x_I, y_I et z_I du point I vérifient la représentation paramétrique de la droite (EC) et l'équation cartésienne du plan (GBD).
D'où le système suivant :

$$\begin{cases} x_I & = & t \\ y_I & = & t & \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z_I & = & 1-t \\ x_I + y_I - z_I - 1 & = & 0 \end{cases}$$

En substituant x_1, y_1 et z_1 dans la dernière équation, nous obtenons l'équation avec la seule inconnue t :

$$t + t - 1 + t - 1 = 0$$

Elle a pour solution $t = \frac{2}{3}$. D'où $\begin{cases} x_I & = & \frac{2}{3} \\ y_I & = & \frac{2}{3} \\ z_I & = & 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Le point I a donc bien pour coordonnés $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D'après ce qui précède, la distance du point E au plan (GBD) est la longueur EI (car la droite (EC) est perpendiculaire au plan $(GBD$ en I).
Connaissant les coordonnées de E et I, nous en déduisons que :

$$EI = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5. a. Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

En s'appuyant sur la figure du cube, observons que les côtés $[BD]$, $[BG]$ et $[DG]$ du triangle BDG sont les diagonales respectives des faces $ABCD$, $BCGF$ et $DCGH$ du cube $ABCDEFCH$.
Ce cube a pour arête 1. Toutes ses faces sont donc des carrés identiques dont les diagonales mesurent toutes $\sqrt{2}$ (on applique le théorème de Pythagore avec la diagonale comme hypothénuse).
On a donc $BD = BG = DG = \sqrt{2}$.
Ce qui montre que le triangle BDG est équilatéral.

b. Calculer l'aire du triangle BDG.

On pourra utiliser le point J, milieu du segment $[BD]$.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BDG. Le point J étant le milieu du segment $[BD]$ et le triangle BDG étant équilatéral, il s'ensuit que le segment $[GJ]$ est à la fois médiane et hauteur issue du sommet G dans le triangle BDG. Si bien que $\mathscr{A} = \frac{BD \times GJ}{2}$.
Comme expliqué à la question **5.a.** précédente, $BD = \sqrt{2}$. Calculons GJ.

Les points B et D ont pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, donc J milieu de $[BD]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. Le point G a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. D'où :

$GJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(0-1)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

L'aire du triangle BDG est donc :

$$\mathscr{A} = \frac{BD \times GJ}{2} = \frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Justifier que le volume du tétraèdre $EGBD$ est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ *où* B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *est la hauteur relative à cette base.*

En prenant comme base de ce tétraèdre le triangle (GBD) et pour hauteur $[EI]$, des réponses aux questions **3** et **4.c**, il suit :

$$\mathscr{V}_{EGBD} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{GBD} \times EI$$

$$\text{Soit } \mathscr{V}_{EGBD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$$