



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
MATHÉMATIQUES

- CORRIGÉ -

Publié le 7 avril 2022



Métropole - Session 15 mars 2021 - Sujet 2

(épreuve annulée suite au rebond de l'épidémie de la covid 19)

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Exercice 1, commun à tous les candidats**5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

Nous savons, dans ce cas, que pour tout entier $0 \leq k \leq 9$, $P(X = k) = \binom{9}{k} \times 0,03^k \times 0,97^{9-k}$

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 b. 1 c. 0,24 d. 0,76

Le fait qu'aucune des neuf adresses soit illisible correspond à l'évènement ($X = 0$).

$$P(X = 0) = \binom{9}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^9 \approx 0,76.$$

La réponse **d.** est exacte.

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ b. $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ d. $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

Avoir exactement 2 adresses illisibles pour la machine parmi les neuf correspond à l'évènement ($X = 2$).

$$P(X = 2) = \binom{9}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^7.$$

La réponse **c.** est exacte.

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X < 1)$ b. $P(X \leq 1)$ c. $P(X \geq 2)$ d. $1 - P(X = 0)$

Au moins une des neuf adresses est illisible pour la machine se traduit par ($X \geq 1$). L'évènement contraire est ($X = 0$). Ce qui fait que :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0).$$

La réponse **d.** est exacte.

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

1. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{4}{7}$ c. $\frac{5}{14}$ d. $\frac{20}{56}$

L'énoncé précise que les boules sont indiscernables au toucher et que les tirages se font au hasard. Ce qui suggère d'assimiler la proportion des boules d'une certaine couleur dans l'urne à la probabilité de tirer une boule de cette couleur.

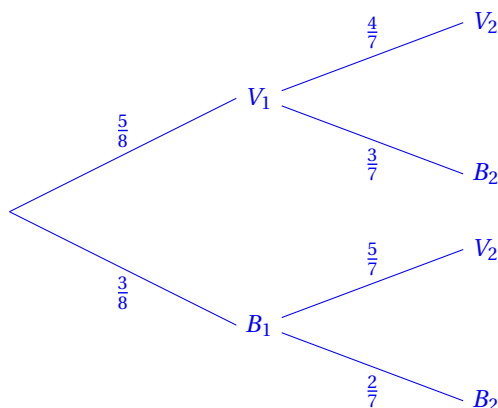
Puisque les tirages se font sans remise, lorsqu'une première boule verte a été tirée, il reste 7 boules dans l'urne dont 4 sont vertes. Ce qui fait que $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$.

La réponse **b.** est exacte.

2. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{5}{7}$ c. $\frac{3}{28}$ d. $\frac{9}{7}$

La situation évoquée dans l'énoncé peut être représentée par l'arbre de probabilités suivant :



Selon la formule des probabilités totales et par lecture de l'arbre pondéré :

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

La réponse **a.** est exacte.

Exercice 2, commun à tous les candidats

6 points

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a. Calculez u_1 et v_1 .

En remplaçant n par 0 dans les égalités $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$, on obtient :

$$u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$$

$$v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.

Nous savons que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. C'est-à-dire que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.

Comme l'énoncé l'indique, la suite (u_n) est strictement positive, il s'ensuit que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n > 0.$$

Ce qui montre que la suite (v_n) est strictement croissante.

Le premier terme d'une suite croissante est évidemment celui qui a la plus petite valeur. On en déduit que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0$ et donc $v_n \geq 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.

On note, pour tout entier naturel n , \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \geq n + 1$.

— Initialisation

Comme $u_0 = 1$, on a $u_0 \geq 0 + 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

— Hérité

Montrons que pour tout entier naturel n , \mathcal{P}_n implique \mathcal{P}_{n+1} .

Par définition, $u_{n+1} = u_n + v_n$.

D'après la question 1.b., $v_n \geq 1$. Si de plus $u_n \geq n + 1$ alors $u_{n+1} \geq (n + 1) + 1$ soit $u_{n+1} \geq n + 2$

On a démontré que pour tout entier naturel n , si $u_n \geq n + 1$ alors $u_{n+1} \geq n + 2$.

\mathcal{P}_n est bien héréditaire.

— Conclusion

\mathcal{P}_0 est vraie et la propriété \mathcal{P}_n est héréditaire pour tout entier $n \geq 0$.

En vertu du principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Nous savons que, pour tout entier naturel n : $u_n \geq n + 1$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$,

par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

$(-1)^{n+1} = 1$ lorsque n est impair et $(-1)^{n+1} = -1$ lorsque n est pair.

D'où l'encadrement : $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$.

Or nous savons que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$; il s'ensuit que $u_n^2 > 0$.

Ce qui permet de diviser chaque membre de l'encadrement précédent par u_n^2 et d'obtenir :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

Partons du résultat précédent, c'est-à-dire de ce que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$$

D'après 1. d. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. A fortiori $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$.

Si bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{u_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$

- c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

L'énoncé précise que pour tout entier naturel n , $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

Or d'après 2. b., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2$.

Il s'avère que pour tout entier naturel n , $r_n > 0$. En effet, $r_n = \frac{v_n}{u_n}$ et les quantités u_n et v_n sont strictement positives.

Si bien qu'on peut écrire : $r_n = \sqrt{r_n^2}$.

La fonction racine carrée étant continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{r_n^2} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2} = \sqrt{2}$

La suite (r_n) converge bien vers $\sqrt{2}$.

- d. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

Nous savons que, pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$$

En factorisant puis simplifiant par $u_n > 0$:

$$r_{n+1} = \frac{u_n \left(2 + \frac{v_n}{u_n} \right)}{u_n \left(1 + \frac{v_n}{u_n} \right)} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}}$$

Comme $r_n = \frac{v_n}{u_n}$, on obtient bien :

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

- e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et $10^{**}(-4)$ représente 10^{-4}).

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

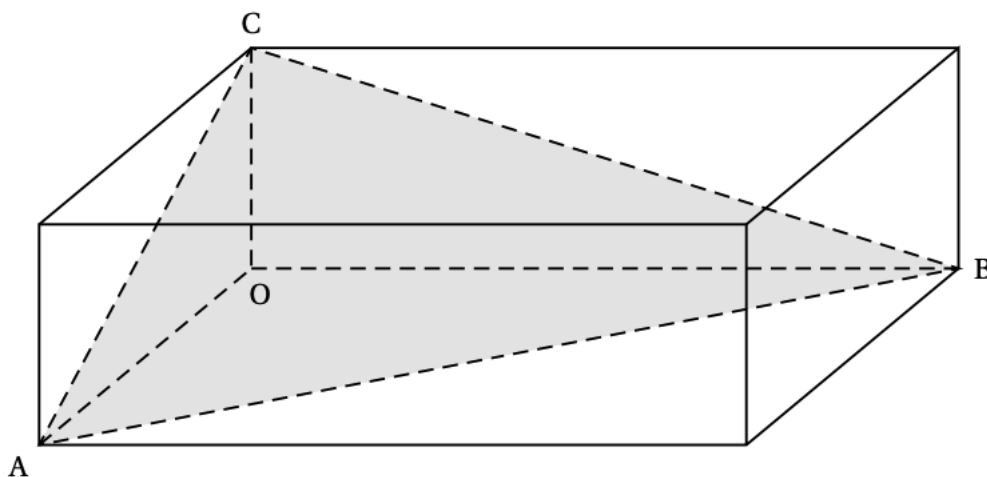
Ce programme calcule successivement $|r_0 - \sqrt{2}|$, $|r_1 - \sqrt{2}|$, $|r_2 - \sqrt{2}|$, etc, qui sont les distances qui séparent les termes de la suite de $\sqrt{2}$. Le programme s'arrête pour le premier entier n tel que $|r_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$. Le programme renvoie alors la valeur de l'entier n correspondant. L'énoncé précise que la valeur de n en question est 5.

Autrement dit, pour $n \geq 5$, les valeurs r_n approximent $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-4} près.

Exercice 3, commun à tous les candidats

4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées $(2; 0; 0)$, B de coordonnées $(0; 3; 0)$ et C de coordonnées $(0; 0; 1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous avons :

$$A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 1), \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

À en juger leurs coordonnées, les points A, B et C sont distincts. Leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont de plus non colinéaires. Les points A, B et C définissent donc bien un plan et \vec{AB} et \vec{AC} en sont deux vecteurs directeurs.

Nous constatons que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = -2 \times 3 + 3 \times 2 + 0 \times 6 = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{n} = -2 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 6 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC). Il est à ce titre normal au plan (ABC).

- a. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

D'après le résultat qui précède, une équation du plan (ABC) est $3x + 2y + 6z + k = 0$ où k est une constante réelle.

Cette équation est en particulier vérifiée si l'on remplace x , y et z par les coordonnées du point A. On a donc :

$$3 \times 2 + 2 \times 0 + 6 \times 0 + k = 0 \text{ d'où } k = -6$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

- a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

Puisque la droite d est orthogonale au plan (ABC), le vecteur \vec{n} en est naturellement un vecteur directeur.

Comme, en outre, la droite d passe par le point O de coordonnées $(0; 0; 0)$, une représentation paramétrique de cette droite est alors :

$$\begin{cases} x = 3k \\ y = 2k, & k \in \mathbb{R} \\ z = 6k \end{cases}$$

- b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49})$.
La droite d , étant orthogonale au plan (ABC), intercepte en effet celui-ci en un point H unique dont les coordonnées (x, y, z) vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \\ z = 6k \\ 3x + 2y + 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

De ce système nous déduisons que :

$$\begin{aligned} 3 \times 3k + 2 \times 2k + 6 \times 6k - 6 = 0 &\iff 9k + 4k + 36k = 6 \\ &\iff 49k = 6 \\ &\iff k = \frac{6}{49} \end{aligned}$$

D'où

$$x = 3k = \frac{18}{49}, y = 2k = \frac{12}{49}, z = 6k = \frac{36}{49}$$

Le point H a bien pour coordonnées $(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49})$.

- c. Calculer la distance OH.

$$OH^2 = (x_H - x_O)^2 + (y_H - y_O)^2 + (z_H - z_O)^2$$

$$OH^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2$$

$$OH^2 = \frac{18^2 + 12^2 + 36^2}{49^2}$$

$$OH^2 = \frac{1764}{49^2}$$

$$\text{Il s'ensuit } OH = \sqrt{\frac{1764}{49^2}} = \frac{6}{7}.$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} h$, où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

- En prenant le triangle OAB comme base de la pyramide OABC,

la hauteur est alors $OC = 1$ et $\mathcal{B} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$.

$$\text{D'où } V_{OABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times OC = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$$

- En prenant le triangle ABC comme base de la pyramide OABC,

la hauteur est alors $OH = \frac{6}{7}$.

En notant \mathcal{B} l'aire de la base triangulaire ABC,

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times OH = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{7} \times \mathcal{B}$$

Sachant que $V_{OABC} = 1$, on trouve $\mathcal{B} = 3,5$ u.a.

EXERCICE au choix du candidat

5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

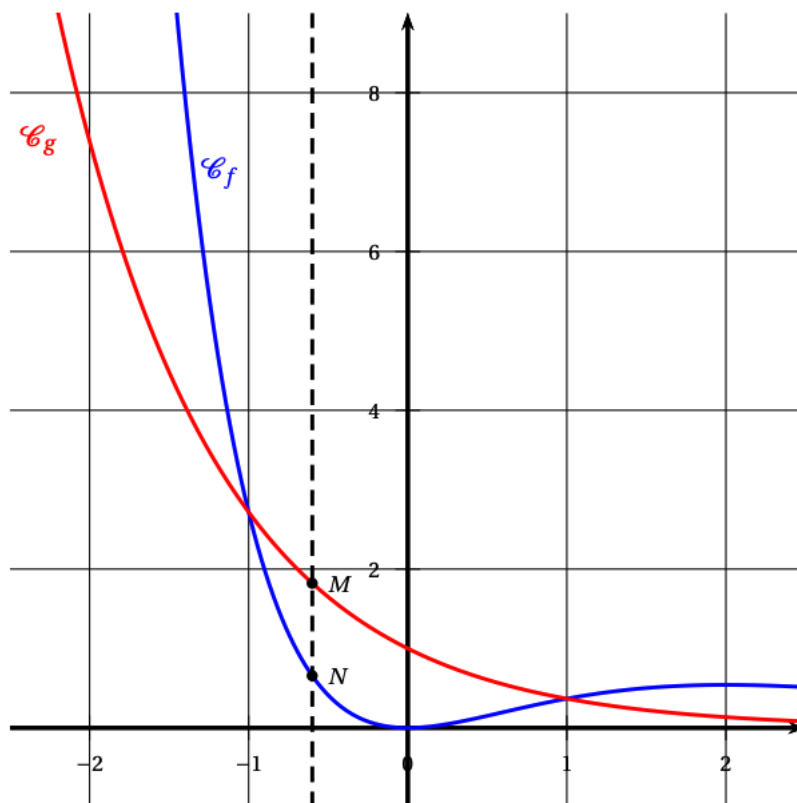
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle; dérivation.

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

L'abscisse x d'un point d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g vérifie l'égalité $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 e^{-x} = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

Nous savons que pour tout réel x , $e^{-x} \neq 0$, il s'ensuit :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 1) \end{aligned}$$

$$g(-1) = e^{(-(-1))} = e \quad \text{et} \quad g(1) = e^{-1}.$$

Par conséquent, \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont deux points d'intersection de coordonnées respectivement $(-1; e)$ et $(1; e^{-1})$. Ce que nous pouvons observer sur le graphique ci-dessus.

- b. Étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Étudier la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g revient à étudier le signe de $f(x) - g(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

Le tableau suivant résume les choses :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	+
e^{-x}	+		+	+
$(x^2 - 1)e^{-x}$	+	0	-	+

Selon ce tableau, la courbe \mathcal{C}_f est située au-dessus de la courbe \mathcal{C}_g sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et en dessous de la courbe \mathcal{C}_g sur $]-1; 1[$.

Ce résultat se vérifie sur le graphique représentant \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x ; f(x))$ et N de coordonnées $(x ; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN . On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.

On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

- a. Montrer que $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.

$$d(x) = u(x) - v(x) \text{ avec } u(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = x^2 e^{-x}$$

L'énoncé nous exonère de démontrer la dérivabilité de u et de v . En appliquant les formules de dérivation usuelles, nous obtenons :

$$d'(x) = u'(x) - v'(x) \text{ avec } u'(x) = -e^{-x} \text{ et } v'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

$$d'(x) = e^{-x} [-1 - (2x - x^2)]$$

$$d'(x) = e^{-x} (x^2 - 2x - 1)$$

- b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Comme le suggère l'énoncé, les variations de la fonction d peuvent se déduire du signe de d' .

$d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$ a un signe identique à celui du trinôme $x^2 - 2x - 1$ étant donné que, pour tout réel x , e^{-x} est strictement positif.

$x^2 - 2x - 1$ est un trinôme du second degré qui a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$.

Ses deux racines sont :

$$\frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Nous en savons assez pour construire, ci-après, le tableau de signe de $d'(x)$.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 1$	+	0	-	0	+
e^{-x}	+		+		+
$e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$	+	0	-	0	+

En se restreignant à l'intervalle $[-1 ; 1]$, qui contient $1 - \sqrt{2}$, les variations de la fonction d sont donc les suivantes :

x	-1	$1 - \sqrt{2}$	1		
$d'(x)$		+	0	-	
$d(x)$	0	↗ ↘		0	

La fonction d est strictement croissante sur $[-1 ; 1 - \sqrt{2}[$ car $d'(x) > 0$ sur cet intervalle et d est strictement décroissante sur $]1 - \sqrt{2} ; 1]$ car $d'(x) < 0$ sur cet intervalle.

- c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à $0,1$ près de la distance $M_0 N_0$.

Le tableau de variations de la fonction d sur $[-1 ; 1]$ montre que la distance $d(x)$ atteint un maximum en $x_0 = 1 - \sqrt{2}$.

Comme $d(x) = (1 - x^2)e^{-x}$, on a :

$$d(1 - \sqrt{2}) = (1 - (1 + 2 - 2\sqrt{2}))e^{-1 + \sqrt{2}}$$

$$d(1 - \sqrt{2}) = (-2 + 2\sqrt{2})e^{-1 + \sqrt{2}} \approx 1,254$$

Donc la distance $M_0 N_0$ a pour valeur approchée 1,3 au dixième près.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

On considère la fonction h dérivable sur \mathbb{R} et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.

En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe \mathcal{C}_g .

Remarquons que $h(x) = e^{-x} - (x + 2) = g(x) - y$

Aux points d'abscisse x où la droite Δ et la courbe \mathcal{C}_g sont sécantes nous avons $h(x) = 0$. Les points recherchés ont donc une abscisse x solution de l'équation $e^{-x} - x - 2 = 0$.

Il faut bien se garder de vouloir la résoudre. Une approche pour en trouver le nombre de solutions consiste à étudier les variations de la fonction h et à trouver le nombre de fois où elle s'annule.

L'énoncé précise que la fonction h est dérivable sur \mathbb{R} . Ce qui nous épargne de le démontrer. Selon les formules usuelles de dérivation, on a $h'(x) = -e^{-x} - 1$.

Or pour tout réel x , $e^{-x} > 0$, ce qui fait que $h'(x) < 0$.

Il s'ensuit que la fonction h est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

En outre, assez simplement, on trouve que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

Ce que résume le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	-	
$h(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Comme la fonction h est strictement monotone, continue sur \mathbb{R} et que $0 \in]-\infty ; +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique et nous assure l'existence d'une unique solution pour l'équation $h(x) = 0$.

Autrement dit, la droite Δ et la courbe \mathcal{C}_g ont un unique point d'intersection.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme; dérivation.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty$, on en déduit, par addition, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

D'autre part,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 2) = -2$, on en déduit, par addition, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction \ln et la fonction affine $x \mapsto 2x - 2$ sont toutes deux dérivables. En conséquence, la fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

En appliquant les formules usuelles de dérivation, on trouve $g'(x) = \frac{1}{x} + 2$

Puisque $x > 0$, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

La fonction g est non seulement strictement croissante mais aussi continue car dérivable sur $]0; +\infty[$; de plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty; +\infty[$.

En conséquence, selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $]0; +\infty[$ comme l'illustre le tableau de variation ci-dessous.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(Le tableau ci-dessus illustre la variation de la fonction $g(x)$: elle passe de $-\infty$ à $+\infty$ en traversant 0 à $x = \alpha$. Une flèche diagonale pointe de $(0, -\infty)$ vers $(+\infty, +\infty)$, et une flèche verticale descend de $(\alpha, +\infty)$ vers $(\alpha, 0)$.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0; +\infty[$.

$g(1) = \ln(1) + 2 \times 1 - 2 = 0$. Ce qui indique que $\alpha = 1$.

Il s'ensuit que $g(x)$ est strictement négative sur l'intervalle $]0; 1[$ et que $g(x)$ est strictement positive sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

$$f = u \times v \text{ avec } u(x) = 2 - \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \ln(x) - 1.$$

En appliquant la formule de dérivation : $(u \times v)' = u'v + uv'$, on obtient :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Nous savons que $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Il s'ensuit que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Signe déjà établi en fin de partie I.

$$\text{Par ailleurs, } f(1) = \left(2 - \frac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$$

D'où le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$	
$g(x)$		-	0	+
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(2 - \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln(x) - 1 = 0\right) \\
 &\Leftrightarrow \left(2 = \frac{1}{x} \text{ ou } \ln(x) = 1\right) \\
 &\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = e\right)
 \end{aligned}$$

Les valeurs $\frac{1}{2}$ et e sont bien dans $]0; +\infty[$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions : $\frac{1}{2}$ et e .

Reportons ces valeurs dans le tableau de variations de f comme ci-dessous :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	e	$+\infty$
$f(x)$					

Ça nous permet d'en déduire le tableau de signes de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{2}$	e	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f .

Ainsi, on a : $F' = f$.

On note \mathcal{C}_F la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0; +\infty[$.

Nous savons que $F' = f$, il s'ensuit que $F'(x)$ a même signe que $f(x)$ (obtenu en fin de **Partie II**).

Le tableau de variations de la fonction F sur $]0; +\infty[$ s'établit sans difficulté :

x	0	$\frac{1}{2}$	e	$+\infty$		
$F'(x) = f(x)$		+	0	-	0	+
F		↗ ↘		↗		

2. La courbe \mathcal{C}_F représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses? Justifier la réponse.

\mathcal{C}_F admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses si, et seulement si, il existe des valeurs de x pour lesquelles $F'(x) = 0$.

$$F'(x) = 0 \iff f(x) = 0.$$

Nous avons démontré, à la question 2. de la **Partie II**, que $f(x) = 0 \iff (x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = e)$.

Il s'ensuit que \mathcal{C}_F admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et e .