Baccalauréat Général - Mathématiques
Épreuve de spécialité
Métropole 15 mars 2021

PROF EXPRESS
N°1 du soutien scolaire en ligne

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Métropole - Session 15 mars 2021 - Sujet 1

MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

Publié le 7 avril 2022

Métropole - Session 15 mars 2021 - Sujet 1

(épreuve annulée suite au rebond de l'épidémie de la covid 19)

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Sujet 1

Exercice 1, commun à tous les candidats **5 points**

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

— 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.

— Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

— D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;

— A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;

— $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

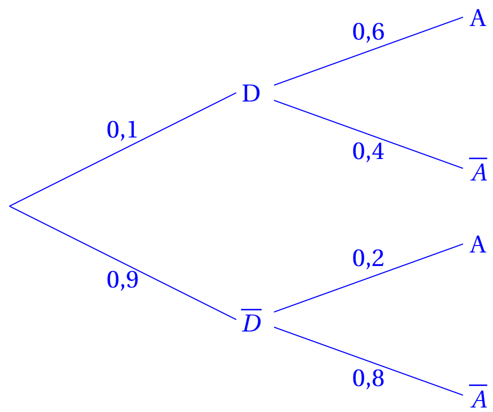
En assimilant les proportions données dans l'énoncé à des valeurs de probabilités, il est suggéré que :

$$P(D) = 0,1$$

$$P_D(A) = 0,6$$

$$P_{\overline{D}}(A) = 0,2$$

Le processus de sélection des candidats, en deux étapes, se traduit alors par l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

Être sélectionné sur dossier et être admis à l'école correspond à l'évènement $D \cap A$.

$P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.

$\{D, \overline{D}\}$ forme un système complet. Selon la formule des probabilités totales et par lecture de l'arbre pondéré :

$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

La probabilité que le dossier n'ait pas été sélectionné, sachant que le candidat est admis, est la probabilité conditionnelle :

$$P_A(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,24} = 0,75.$$

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.

On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs entières allant de 1 à 7. Il y a succès lorsqu'un candidat est admis à l'école. Les paramètres de cette loi binomiale sont donc $n = 7$ (le nombre de candidats) et $p = 0,24$ (la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école).

L'énoncé ne le demande pas mais il faut avoir en tête que pour tout entier $0 \leq k \leq 7$,
$P(X = k) = \binom{7}{k} \times 0,24^k \times 0,76^{7-k}$

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

$P(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1 - 0,24)^{7-1} \approx 0,32.$

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \approx 1 - [(\binom{7}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^7) + 0,32] \approx 0,53.$

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,24)$.

Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n.$

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

La question posée se traduit par : $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

Or $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0)$ et $P(Y = 0) = 0,76^n$ (cf. question précédente).

Si bien que

$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 0,76^n \leqslant 0,01$

$$\begin{aligned} 0,76^n \leqslant 0,01 &\iff \ln(0,76^n) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \text{ (l'inégalité change de sens car } \ln(0,76) < 0) \end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$

Par conséquent, la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$ lorsqu'il y a au moins 17 élèves.

Exercice 2, commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Calculons la limite de f en 0^+ :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Par conséquent, l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$. f est dérivable comme quotient de deux fonctions u et v dérivables sur l'ensemble de définition de f.

En appliquant la formule de dérivation $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient :

$f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Or x^2 et e^x sont des quantités strictement positives sur $]0\,;\,+\infty[$. Par conséquent $f'(x)$ a même signe que $(x-1)$.

Sachant de plus que $f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$, le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est égal au nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y = m$.

D'après le tableau de variations précédent, on peut affirmer :

— si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;

— si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;

— si $m > e$, le corrolaire du théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence de deux solutions à l'équation $f(x) = m$: l'une dans l'intervalle $]0\,,\,1[$ et l'autre dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.

Le coefficient directeur de la tangente au point A est $f'(a)$.

Le coefficient directeur de la droite Δ est -1.

Deux droites sont parallèles si elles ont même coefficient directeur.

La tangente en A est donc parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(a) = -1$.
Par ailleurs, sur $]0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 &\iff \frac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \\ &\iff \mathrm{e}^a(a-1) = -a^2 \\ &\iff \mathrm{e}^a(a-1) + a^2 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

La dérivabilité de la fonction g est admise. Par application des formules usuelles de dérivation,
$g'(x) = \mathrm{e}^x \times (x-1) + \mathrm{e}^x \times 1 + 2x = x\mathrm{e}^x + 2x$
Sur $[0\,;\,+\infty[$, les quantités x et e^x sont positives. Il s'ensuit que $g'(x) \geqslant 0$.
Sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction g est donc croissante.
Ce n'est pas explicitement demandé mais il convient de calculer $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ pour compléter le tableau de variation de g.
$g(0) = \mathrm{e}^0(0-1) + 0 = -1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} x - 1 &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} x^2 &= +\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

L'ensemble des résultats qui précèdent donne lieu au tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

On peut répondre à la question en s'appuyant sur le tableau de variations de g.

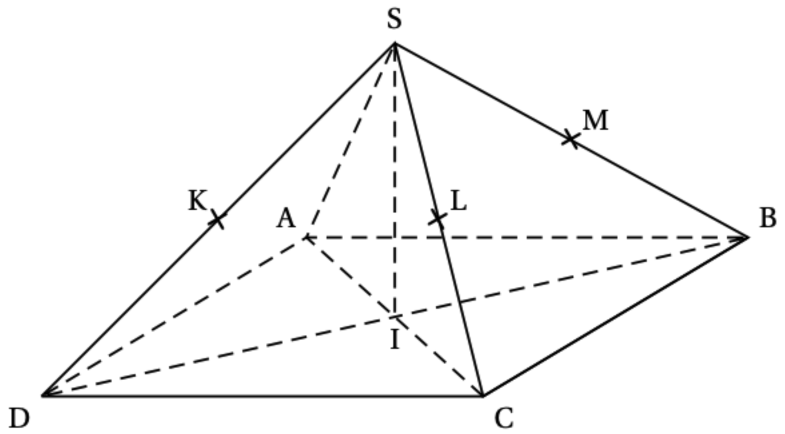
x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est continue car dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$. Elle est aussi strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Nous observons que 0 appartient à l'intervalle image $[-1\,;\,+\infty[$.
En conséquence, selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution a dans $[0\,;\,+\infty[$.
D'un point de vue graphique, il existe donc un unique point A de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3, commun à tous les candidats **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Si on ne voit pas d'emblée sur la figure que seule la réponse **c.** est correcte, on peut procéder par élimination :

— On rejette la proposition **a.** sur le fait que (DK) et (SD) sont confondues. Elles sont trivialement coplanaires.
— On rejette aussi la proposition **b.** car (AS) et (IC) sont sécantes en A, ces droites sont donc coplanaires.
— On rejette enfin la proposition **d.** car (LM) et (AD) sont parallèles puisque toutes deux parallèles à (BC). (LM) et (AD) sont par conséquent coplanaires.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\ \mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\ \mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\ \mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0);\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\ \mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

Pour trouver la réponse, on commence par calculer les coordonnés de K et de L afin d'en déduire celles de N :

— K, milieu de [SD], a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
— L, milieu de [SC], a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
— N, milieu de [KL], a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

La proposition **b.** convient.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

$$\textbf{a.}\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \textbf{c.}\ \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \textbf{d.}\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Dans le repère $\left(\text{I}\,;\,\overrightarrow{\text{IC}},\,\overrightarrow{\text{IB}},\,\overrightarrow{\text{IS}}\right)$, le point A a pour coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,0)$ et le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$. En conséquence, le vecteur $\overrightarrow{AS}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-(-1)\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

La proposition **b.** est correcte.

4. Avec $t \in \mathbb{R}$, une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

$$\textbf{a.}\ \left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right. \qquad \textbf{b.}\ \left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right. \qquad \textbf{c.}\ \left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \qquad \textbf{d.}\ \left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$$

On peut d'emblée exclure les équations paramétriques **a.** et **d.** Elle définissent des droites dirigées par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ non colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AS}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Il reste à choisir entre les équations paramétriques **b.** et **c.** qui ont toutes deux des vecteurs directeurs colinéaires à $\overrightarrow{AS}$. La bonne représentation paramétrique doit permettre de retrouver les coordonnées des points A et S pour certaines valeurs de t. C'est le cas de la représentation paramétrique **c.** : en prenant $t = -1$, on trouve les coordonnées de A et en prenant $t = 0$, on retrouve celles de S.

La proposition **c.** est donc la bonne.

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

L'équation qui convient est celle qui est vérifiée lorsqu'on remplace x, y et z par les coordonnées des trois points S, C et B.

— Les coordonnées de S $(0\,;\,0\,;\,1)$ ne vérifient pas l'équation $x-y+z=0$; la réponse **c.** ne convient pas.

— Les coordonnées de C $(1\,;\,0\,;\,0)$ ne vérifient pas l'équation $y+z-1=0$; la réponse **a.** est donc incorrecte.

— Les coordonnées de B $(0\,;\,1\,;\,0)$ ne vérifient pas l'équation $x+z-1=0$; la réponse **d.** est aussi à rejeter.

La proposition **b.** est donc la bonne.

Exercice au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B. Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B. Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

Pour obtenir u_1, on remplace n par 0 dans l'égalité

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

$u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

En remplaçant n par 1 on obtient $u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	**B**
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

Selon la feuille de calcul ci-dessus, il apparaît que : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$. La suite (u_n) semble être croissante.

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

On note, pour tout entier n, $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

— Initialisation

Comme $u_0 = 1$, on a $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— Hérédité

Montrons que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n$ implique $\mathscr{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\Longrightarrow \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)\\
&\Longrightarrow \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n\\
&\Longrightarrow n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4}\\
&\Longrightarrow n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1\\
&\Longrightarrow n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

or $n + \frac{7}{4} \leq n+2$

donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$

On a démontré que si $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ alors $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$. $\mathscr{P}_n$ est bien héréditaire.

— Conclusion
$\mathscr{P}_0$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire pour $n \geqslant 0$.
En vertu du principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
Autrement dit, l'encadrement : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ est vrai pour tout entier naturel n.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

— D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ et $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$

Il s'ensuit que : $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
Ce qui implique que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante.

— Pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n$;
or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
Par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

Pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
En divisant chaque membre par n, entier naturel $n > 0$, on obtient :
$1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$, c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$
D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$
$v_{n+1} = (\dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1) - n - 1$
$v_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n - n = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3}{4}n$
$v_{n+1} = \dfrac{3}{4}(u_n - n)$
$v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n$

Ce qui montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

D'après **a.**, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Or pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - n \Longleftrightarrow u_n = v_n + n$.
Ce qui fait que $u_n = v_n + n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$

Le calcul des limites en $+\infty$ des termes $(x+4)$, -4ln(x) et $\frac{3}{x}$ donne lieu à une « indétermination » du type « $\infty - \infty$ ». Pour la lever, on peut factoriser par x comme ci-après :

$f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$

Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty$.

Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$,

on trouve finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$

En dérivant chaque terme, on obtient :

$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

On peut d'abord chercher le signe de $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Il s'établit facilement étant donné que le numérateur est un trinôme du second degré qui a pour racines évidentes 1 et 3 et que le dénominateur x^2 est strictement positif. On obtient le tableau suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	−	0	+	
x^2	0	+		+		+	
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	

La fonction f admet un maximum en $x = 1$ et un minimum en $x = 3$.

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \frac{3}{1} = 2$

$f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \frac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1,69$

D'autre part, nous savons que :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (indication de l'énoncé)
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (cf question 1.)
On en déduit le tableau de variation de f ci-dessous :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6-4\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$.

La fonction f est dérivable et donc continue sur $]0\,;\,+\infty[$. Son tableau de variation nous indique qu'elle est strictement monotone sur $]0\,;\,1]$, $]1\,;\,3]$ et $]3\,;\,+\infty]$.
Par application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

- $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.
- $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $f(3) = 6-4\ln 3 \approx 1,61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.
- $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Pour étudier la convexité de f, il y a lieu d'établir le signe de f'', la dérivée de f'.
$f' = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 3$ et $v(x) = x^2$.

En appliquant la formule de dérivation $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient :

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{(2x-4)\times x^2 - (x^2-4x+3)\times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2-4x-2x^2+8x-6)\times x}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$$

Le tableau de signe suivant permet de conclure :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖	f concave		f convexe	

Ainsi, f'' s'annule et change de signe en $x = \dfrac{3}{2}$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur $]0\,;\,\dfrac{3}{2}]$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty]$.

$\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'ordonnée

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \dfrac{11}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2 = \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$